Capitolo 4

Inversa di una matrice

Una matrice $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ è invertibile se $\exists B \in Mat_n(\mathbb{K})$ tale che $AB = BA = I_n$, dove con I_n indichiamo la matrice identica di ordine n. Indichiamo l'inversa di A con A^{-1}.

Osservazione 4.0.1. *La matrice A^{-1}, se esiste, è unica.*

Proposizione 4.0.2. *$A \in Mat_n(\mathbb{K})$ è invertibile $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$.*

Esistono vari metodi per il calcolo dell'inversa di una matrice quadrata invertibile A. Tra i metodi principali:

1. Metodo della Matrice dei cofattori o del Complemento algebrico;
2. Algoritmo di Gauss-Jordan;
3. Metodo delle potenze inverse.

4.1 Il metodo del complemento algebrico

Se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$ si ha:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \quad C_{i,j}^T$$

dove con $C_{i,j}$ intendiamo la matrice in cui in ogni posizione i, j figura il complemento algebrico $c_{i,j}$ dell' elemento $a_{i,j}$ di A.

Il calcolo delle matrici inverse è molto più semplice di quanto sembra. Vediamolo con qualche esempio.

Esempio 4.1.1. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$, *calcoliamo* A^{-1} *e vediamo che è inversa di* A.

- $|A| = 4 + 1 - 4 = 1 \neq 0$. *Esiste inversa;*
- *calcoliamo i complementi algebrici* $c_{i,j} = (-1)^{i+j} |C_{i,j}|$ *di ogni* $a_{i,j}$ $i = 1, 2, 3$ *e* $j = 1, 2, 3$.
  - $c_{1,1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5;$
  - $c_{1,2} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4;$
  - $c_{1,3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2;$
  - ... *(fare tutti gli altri analogamente).*
- $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};$
- $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 5-4 & -2+2 & -1+1 \\ 10-8-2 & -4+4+1 & -2+2 \\ -4+4 & 2-2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Osservazione 4.1.1. *Se* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{K})$*, allora*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{K});$$

Esempio 4.1.2. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R})$*. Calcoliamo* A^{-1} *come indicato nel caso specifico di matrici quadrate di ordine* 2*. (E' un caso particolare del metodo dei complementi algebrici, ma molto più veloce. Provare comunque anche l'altro metodo per esercizio).*
Innanzitutto calcoliamo il determinante di A*, per vedere se è diverso da zero. Si ha:* $|A| = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 0 = -3 \neq 0$*. Possiamo dunque calcolare* A^{-1} *che è:*

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}).$$

Resta da verificare che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$*, cioè* A^{-1} *inversa di* A*. (Provare per esercizio!).*

Proposizione 4.1.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Se* $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ *invertibile, si ha:* $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$*.*

2. *Il prodotto di due matrici invertibili* $A, B \in Mat_n(\mathbb{K})$ *è ancora invertibile, con inversa* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*.*