0.2 I sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni e n incognite

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ...a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + ...a_{2,n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + ...a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

ammette sempre una rappresentazione matriciale del tipo

$$A \cdot \underline{x} = \underline{B}$$

dove

- $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ é detta **matrice incompleta**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- $\underline{x} \in Mat_{n,1}(\mathbb{K})$ é la matrice colonna delle incognite

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $\underline{B} \in Mat_{m,1}(\mathbb{K})$ é la matrice colonna dei termini noti

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si ha inoltre che $A|B \in Mat_{m,n+1}(\mathbb{K})$ é la **matrice completa**.
Se $\underline{B} = \underline{O}$ il sistema si dice **omogeneo**. Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione nulla che é detta soluzione banale. Le altre eventuali soluzioni sono dette autosoluzioni.

Teorema 0.2.1 (di Rouché- Capelli)**.** *Un sistema lineare $A \cdot \underline{x} = \underline{B}$ é compatibile (ammette soluzioni) se e solo se il rango della matrice completa e il rango della matrice incompleta coincidono.*
Inoltre se il sistema é compatibile con $rg(A) = rg(A|B) = r$, le soluzioni dipendono da $n - r$ parametri (cioé si hanno ∞^{n-r} soluzioni).

Osservazione 0.2.1. *Riassumendo:*

- *Se $rg(A) = rg(A|B) = r = n$ massimo, il sistema é compatibile ed ammette un'unica soluzione;*
- *se $rg(A) = rg(A|B) = r < n$, il sistema é compatibile ed ha ∞^{n-r} soluzioni;*
- *se $rg(A) \neq rg(A|B)$, il sistema non ammette soluzioni.*

0.2.1 Esercizi: sistemi senza parametro

Esercizio 0.2.1. *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: Il sistema é omogeneo, dunque compatibile perché $r(A) = r(A|B) = r(A|\underline{0})$. Quante soluzioni ammette? Calcolando il rango di A si ottiene che $r(A) = 2$, dunque il sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, cioé infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro. Cerchiamo l'insieme S delle soluzioni risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x = -2x - 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ y = 2z - 2(-2y - 2z) \\ x = -2y - 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ y = 2z + 4y + 4z \\ x = -2y - 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ y = -2z \\ x = 4z - 2z = 2z \end{cases}$$

La soluzione (x, y, z) si puó allora scrivere in funzione di z come $(2z, -2z, z)$, dunque

$$S = \left\{(2z, -2z, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in \mathbb{R}\right\}$$

Esercizio 0.2.2. *Risolvere, se possibile, il sistema $Ax = B$ con*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ed esprimere la soluzione come somma di soluzione particolare e soluzione generale.

Svolgimento: Calcoliamo $r(A)$ e $r(A|B)$. Si ha $1 \leq r(A) \leq 3$. Se orlo il minore $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ non singolare ottengo un minore $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ non singolare, dunque $r(A) = 3$. Il rango di $A|B$ é al massimo 3, ma $A|B$ contiene il minore M_3 non singolare considerato nel calcolo del rango di A, dunque $r(A|B) = 3$. Essendo $r(A) = r(A|B) = 3$ il sistema é compatibile e ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni.
Calcoliamo l'insieme S delle soluzioni risolvendo il sistema $Ax = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo il prodotto si ottiene

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ 2y - z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = -t \\ z = 2y - 1 \\ t + y + 2y - 1 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -t \\ z = 2y - 1 \\ y = -\frac{1}{3}t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -t \\ z = -\frac{2}{3}t - 1 \\ y = -\frac{1}{3}t \end{cases}$$

Possiamo esprimere la soluzione (x, y, z, t) *in funzione di un unico parametro, dunque l'insieme delle soluzioni é*

$$S = \left\{ \left(-t, -\tfrac{1}{3}t, -\tfrac{2}{3}t - 1, t \right) \in \mathbb{R}^4 | t \in \mathbb{R} \right\}$$

La generica soluzione $\left(-t, -\frac{1}{3}t, -\frac{2}{3}t - 1, t \right)$ *puó essere scritta come somma di* $\left(-t, -\frac{1}{3}t, -\frac{2}{3}t, t \right)$ *e* $(0, 0, -1, 0)$ *che sono rispettivamente la soluzione generale (la soluzione del sistema omogeneo associato* $Ax = 0$*), e la soluzione particolare.*