Indice

Capitolo 1

Polinomio caratteristico di una matrice quadrata

Sia $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ e I_n la matrice identica di ordine n. Per ogni $\lambda \in (\mathbb{K})$ consideriamo la matrice $A - \lambda I_n$:

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,n} - \lambda \end{pmatrix} \in \ Mat_3(\mathbb{R})$$

Definizione 1.0.1. *Il polinomio caratteristico di $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ é $det(A - \lambda I_n)$.*

Il polinomio caratteristico di $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ é un polinomio di grado n nell'indeterminata λ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Definizione 1.0.2. *L'equazione $|A - \lambda I_n| = 0$ é detta equazione caratteristica della matrice A.*

Capitolo 2

Autovalori, Autovettori e Autospazi

2.1 Digressione sui polinomi

Definizione 2.1.1. *Sia $P(x)$ un polinomio di grado n a coefficienti in $\mathbb{K}$. Una radice α di $P(x)$ é un elemento di $\mathbb{K}$ tale che $P(\alpha) = 0$.*

Teorema 2.1.1 (di Ruffini)**.**
Lo scalare α é una radice del polinomio $P(x) \iff P(x)$ é divisibile per $(x - \alpha) \iff P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$

Definizione 2.1.2. *Se $P(x)$é un polinomio divisibile per $(x - \alpha)^h$, ma non per $(x - \alpha)^{h+1}$ (cioé $P(x) = (x-\alpha)^h \cdot Q(x)$ con $Q(\alpha) \neq 0$) allora h é detta **molteplicitá algebrica** della radice α.*

2.2 Autovalori, Autovettori e Autospazi

Definizione 2.2.1. *Data $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, diciamo che $\lambda \in \mathbb{K}$ é **autovalore** di A se annulla il polinomio caratteristico di A, cioé se é radice di $|A - \lambda I|$.*

Definizione 2.2.2. *Data $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, diciamo che $\underline{v} \in \mathbb{K}^{n^*}$ é* ***autovettore*** *se esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$. In questo caso λ si dice autovalore relativo all'autovettore $\underline{v}$.*

Osservazione 2.2.1. $\underline{v} \in \mathbb{K}^{n^*}$ *significa* $\underline{v} \neq \underline{0}$

Definizione 2.2.3. *Se λ autovalore di A, indichiamo con*

$$V_\lambda = \{\underline{v} \in \mathbb{K}^{n^*} | A(\underline{v}) = \lambda\underline{v}\} \cup \{\underline{0}\}$$

*l'**autospazio** relativo all'autovalore λ.*

Osservazione 2.2.2. $V_\lambda \leq V = \mathbb{K}^n$

Esempio 2.2.1. *Calcolare gli autovalori della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{C}).$$

- *Troviamo il suo polinomio caratteristico:*

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)^2 + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5);$$

- *Gli autovalori di A annullano il polinomio caratteristico. Poniamo allora $(1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+5) = 0$ da cui, essendo in $\mathbb{C}$, risultano tre radici del polinomio, cioé tre autovalori di A:*

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2+i, \qquad \lambda_3 = 2-i.$$

Esempio 2.2.2. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$. *Calcolare autovalori e autospazi relativi.*

<u>*Svolgimento:*</u>

1. *Autovalori: troviamo le radici del polinomio caratteristico di A:*

   $|A-\lambda I| = -\lambda(2-\lambda)(5-\lambda)+6(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) =$

   $= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = -(\lambda^2-4\lambda+4)(\lambda-3) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$

   Ponendo

   $$-(\lambda-2)^2(\lambda-3)=0$$

   troviamo gli autovalori

   $$\lambda_1 = 2 \qquad e \qquad \lambda_2 = 3;$$

2. *Autospazio V_2 relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$:*

   $$V_2 = \{v \in \mathbb{R}^{3^*} | Av = 2v\} \cup \{\underline{0}\}$$

   Calcoliamo $Av = 2v$:

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} -6z \\ -x+2y-3z \\ x+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ \forall y \\ \forall z \end{cases}$$

   Allora possiamo scrivere

   $$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -3z \\ y \\ z \end{pmatrix} | y, z \in \mathbb{R} \right\} =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

   I vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sono gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = 2$.*

   Calcolare per esercizio l'autospazio V_3 relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$.

2.2.1 Moleplicitá algebrica e geometrica degli autovalori

Definizione 2.2.4. *Dato λ autovalore di A, definiamo* ***molteplicitá algebrica di*** *λ e la indichiamo con a_λ o con $m_{a\lambda}$ la molteplicitá algebrica di λ come radice del polinomio caratteristico di A.*

Definizione 2.2.5. *Definiamo la* ***molteplicitá geometrica dell'autovalore*** *λ, e la indichiamo con g_λ o con $m_{g\lambda}$, la dimensione dell'autospazio V_λ relativo all'autovalore λ ($dimV_\lambda$).*

Vale il seguente risultato:

Teorema 2.2.1. *Se λ autovalore di A, si ha:* $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$.

Osservazione 2.2.3. *In generale $g_\lambda \neq a_\lambda$.*

Osservazione 2.2.4. *Dal teorema segue che se $a_\lambda = 1$, allora necessariamente $g_\lambda = 1$.*

Definizione 2.2.6. *Un autovalore si dice* ***regolare*** *se $g_\lambda = a_\lambda$*

Esempio 2.2.3. *Consideriamo l'esempio 2.2.2 della sezione precedente. Si ha:*

$$g_{\lambda_1} = dimV_{\lambda_1} = 2 = a_{\lambda_1}.$$

Calcolare per esercizio g_{λ_2} e a_{λ_2}.