Capitolo 5

Rango di una matrice

Ricordiamo che:

- una matrice quadrata si dice **singolare** se il suo determinante è nullo, altrimenti la matrice è **non singolare**;
- un **minore** di ordine p di $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ è una matrice quadrata di ordine p ottenuta da A sopprimendone $m - p$ righe e $n - p$ colonne.

Il rango di una matrice $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ è l'ordine del più grande minore non singolare contenuto in A. Lo indichiamo con $rg(A)$, $r(A)$, $\rho(A)$.
Il rango di una matrice $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ è anche definito come il numero massimo di righe (o di colonne) linearmente indipendenti di A.
Alcune delle proprietà del rango di una matrice sono:

1. $0 \leq rg(A) \leq \min\{m, n\}$;
2. $rg(A) = rg(A^T)$.
3. $rg(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$

5.1 Calcolo del rango

1. Se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, cioè se A è quadrata possiamo iniziare a vedere se il rango di A è massimo cioè n. Se $|A| \neq 0$, allora $rg(A) = n$;

(a) se $|A| \neq 0$, allora $rg(A) = n$;

(b) se $|A| = 0$ e $A \neq \underline{O}$ allora $1 \leq rg(A) < n$.

Utilizziamo il teorema degli orlati. Ricordiamo che dato un minore M_p di ordine p di una matrice A, diremo che il minore M_{p+1} di ordine $p+1$ è un orlato di M_p se esso contiene interamente M_p. Il **teorema di Kronecker** o **degli orlati** dice che se in A esiste un minore M_p di ordine p non singolare e tutti gli orlati di M_p di ordine $p+1$ sono singolari, allora $r(A) = p$. Grazie a tale teorema non occorre controllare tutti i minori di ordine $p+1$ contenuti in una matrice, ma solo quelli ottenuti come orlati di un minore di ordine p.

Analizzo dunque un minore di ordine 2 che contenga interamente il minore di ordine 1 non singolare. Se tutti i minori di ordine 2 in questione sono singolari allora $r(A) = 1$, altrimenti se trovo un minore M_2 di ordine 2 non singolare posso dire $2 \leq rg(A) < n$ e continuare similmente cercando se tra gli orlati M_3 (di M_2) di ordine 3 ne esiste uno non singolare. Se tutti gli M_3 orlati di M_2 sono singolari allora $r(A) = 2$, altrimenti se esiste un M_3 con determinante non nullo ho $3 \leq rg(A) < n$ e così via fino a $n-1$.

2. Se $A \in Mat_{m,n}\mathbb{K}$, cioè rettangolare si ha, come prima enunciato:

$$0 \leq rg(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Come si procede in questo caso per calcolarne il rango?

Non posso calcolare il determinante di una matrice rettangolare, dunque lavorerò come fatto sulle matrici quadrate dal punto (b), con il teorema degli orlati. Se $A \neq O$ allora c'è almeno un elemento non nullo in A che costituisce un minore M_1 non singolare di ordine 1 e dunque $1 \leq rg(A) \leq \min\{m, n\}$. Procedo ora con il teorema degli orlati e analizzo i minori di ordine due M_2 ottenuti come orlati di M_1... e così via come fatto al punto $(1b)$.

Esempio 5.1.1. *Calcoliamo il rango di* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$.

A non ha rango 3, infatti $|A| = 0$.

Controlliamo allora se esiste un minore di ordine 2 *con determinante non nullo.*

Alcuni minori hanno determinante nullo, ad esempio $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *o* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esiste però almeno un minore, ad esempio $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, *che ha determinante non nullo. Allora* $rg(A) = 2$.

Esempio 5.1.2. *Calcoliamo il rango di* $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 & k+1 \\ k-1 & 2 & 0 & k+1 \\ 0 & k & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{3,4}(\mathbb{R})$ *al variare di* $k \in \mathbb{R}$.

Osserviamo subito che $r(A_k) \neq 0$ *perché in* A *esistono minori di ordine* 1 *non singolari indipendentemente da* k, *dunque* $1 \leq r(A_k) \leq min3, 4$ *cioè* $2 \leq r(A_k) \leq 3$.

In A *c'è anche un* M_2 *non singolare* $\forall k \in \mathbb{R}$, *quello evidenziato nella matrice:*

$$A_k = \begin{pmatrix} k & \boxed{0} & \boxed{1} & k+1 \\ k-1 & \boxed{2} & \boxed{0} & k+1 \\ 0 & k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dunque $2 \leq r(A_k) \leq 3$.

Cerco gli orlati di M_2 *e considero*

$$M_3 = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ k-1 & 2 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $k^2 + k$. *Se* $|M_3| \neq 0$ *allora* $r(A_k) = 3$. *Dunque se* $k \neq 0, -1$ $r(A_k) = 3$. *Se* $k = 0$ *o* $k = -1$?

Se $k = 0$ *la matrice* A_k *diventa*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sappiamo già che $\exists M_2$ *con* $\|M_2\| \neq 0$ *e che l'orlato di ordine* 3 *ottenuto aggiungendo a* M_2 *la prima colonna è singolare, per questo valore di* k. *Controllo l'altro orlato che ottengo aggiungendo a* M_2 *l'ultima colonna:*

$$M_3' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante diverso da zero, dunque anche in questo caso $r(A) = 3$.
Se $k = -1$ *la matrice* A_k *diventa*

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Come nel caso precedente sappiamo già che $\exists M_2$ *con* $|M_2| \neq 0$ *e che l'orlato di ordine* 3 *ottenuto aggiungendo a* M_2 *la prima colonna è singolare, per questo valore di* k. *Controllo l'altro orlato che ottengo aggiungendo a* M_2 *l'ultima colonna:*

$$M_3' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante diverso da zero, dunque anche in questo caso $r(A) = 3$.
Allora $r(A_k) = 3$ *per ogni* $k \in \mathbb{R}$

Esercizi 5.1.1. *Trovare il rango delle seguenti matrici:*

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

7. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Soluzioni: 3-1-1-2-1- 2- 3-2