0.1 Complemento diretto

Dato $U \leq V$, **<u>un</u> complemento diretto** di U é un sottospazio $W \leq V$ tale che

$$\begin{cases} U \cap W = \{\underline{0}\} \\ U + W = V \end{cases}$$

cioé la somma di U con il suo complemento diretto é diretta, e dá tutto lo spazio vettoriale V.

Come trovo un complemento diretto per un sottospazio vettoriale U di $V((K))$?

1. trovo una base B_U di U;
2. trovo un completamento $\overline{B}$ di B_U. Il completamento é un insieme libero di vettori che uniti a quelli della base di U trovata, sono una base per tutto lo spazio V.
3. il complemento diretto di U é la chiusura del completamento $\overline{B}$ della sua base B_U.

Esercizio 0.1.1. *Dato*

$$W = C\left(\left\{\begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha+\beta+1 \\ 0 & \beta-1 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}\right)$$

Determina

a) una base B_W e la $dim(W)$;

b) un completamento $\overline{B}$ di B_W;

c) un complemento diretto di W.

Svolgimento:

a)

$$W = \left\{\begin{pmatrix} a+c & a+b+c \\ 0 & b-c \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}) | a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

L'insieme

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

é un insieme di generatori per W. E' anche una base? Verifico che i vettori sono linearmente indipendenti, dunque

$$B_W = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

e $dim(W) = 3$.

b) Cerco un completamento della base B_W cioé un insieme di vettori che uniti ai vettori di B_W siano una base per lo spazio vettoriale $Mat_2(\mathbb{R})$. So che $dim(W) = 3$ e che $dim(Mat_2(\mathbb{R})) = 4$, dunque devo aggiungere ai vettori di B_W un vettore linearmente indipendente con essi. Posso sceglierlo tra quelli della base canonica di $Mat_2(\mathbb{R})$. Osservo che i vettori di B_W generano matrici di $Mat_2(\mathbb{R})$ che hanno 0 in posizione $a_{2,1}$, dunque mi servirá un vettore che utilizzato nella combinazione lineare "generi " anche quella posizione per potere ottenere una generica matrice di $Mat_2(\mathbb{R})$. Il vettore della base canonica che posso scegliere é dunque

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifico che i vettori di B_W con e_3 sono linearmente indipendenti, allora un completamento $\overline{B}$ di B_W é

$$\overline{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

c) Per trovare un complemento diretto $\overline{W}$ di W faccio la chiusura del completamento $\overline{B}$ di B_W:

$$\overline{W} = < \overline{B} > = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}) | a \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 0.1.2. *Dato*

$$U = C\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1+a \\ a & 1 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}) | a \in \mathbb{R}\right\}\right)$$

Determina un complemento diretto di U. *Svolgimento:*

a)

$$U = \left\{\begin{pmatrix} 2b & a+b \\ a & b \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}) | a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

L'insieme

$$S = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

é un insieme di generatori per U. *E' anche una base? Non essendo i due vettori uno multiplo dell'altro, sí, dunque*

$$B_U = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

e $dim(U) = 2$.

b) *Cerco un completamento della base* B_U *cioé un insieme di vettori che uniti ai vettori di* B_U *siano una base per lo spazio vettoriale* $Mat_2(\mathbb{R})$. *So che* $dim(U) = 2$ *e che* $dim(Mat_2(\mathbb{R})) = 4$, *dunque devo aggiungere ai vettori di* B_U *due vettori linearmente indipendente con essi. Posso sceglierli tra quelli della base canonica di* $Mat_2(\mathbb{R})$, *ma come li scelgo? Ho a disposizione i vettori*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservo che il secondo vettore v_2 *della base* B_U *é la somma di* e_2 *con* e_3, *dunque non sceglieró questi due vettori come vettori del completamento, perché non saranno linearmente indipendenti con i vettori della base di* U. *Posso scegliere* *ad esempio* e_1 *ed* e_2 *e poi controllo se sono linearmente indipendenti con i vettori di* B_U *(posso scegliere anche altre coppie di vettori di* B_C *purché siano linearmente indipendenti con i vettori di* B_U*). Dato che* e_1 *e* e_2 *sono l.i. con i vettori di* B_U*, allora un completamento* $\overline{B}$ *di* B_U *é*

$$\overline{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

c) *Per trovare un complemento diretto* $\overline{U}$ *di* U *faccio la chiusura del completamento* $\overline{B}$ *di* B_U*:*

$$\overline{U} =< \overline{B} >= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}) | a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

0.2 I sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni e n incognite

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ...a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + ...a_{2,n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + ...a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

ammette sempre una rappresentazione matriciale del tipo

$$A \cdot \underline{x} = \underline{B}$$

dove

- $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ é detta **matrice incompleta**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- $\underline{x} \in Mat_{n,1}(\mathbb{K})$ é la matrice colonna delle incognite

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $\underline{B} \in Mat_{m,1}(\mathbb{K})$ é la matrice colonna dei termini noti

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si ha inoltre che $A|B \in Mat_{m,n+1}(\mathbb{K})$ é la **matrice completa**.
Se $\underline{B} = \underline{O}$ il sistema si dice **omogeneo**. Un sistema omogeneo ammette sempre la soluzione nulla che é detta soluzione banale. Le altre eventuali soluzioni sono dette autosoluzioni.

Teorema 0.2.1 (di Rouché- Capelli)**.** *Un sistema lineare $A \cdot \underline{x} = \underline{B}$ é compatibile (ammette soluzioni) se e solo se il rango della matrice completa e il rango della matrice incompleta coincidono.*
Inoltre se il sistema é compatibile con $rg(A) = rg(A|B) = r$, le soluzioni dipendono da $n - r$ parametri (cioé si hanno ∞^{n-r} soluzioni).

Osservazione 0.2.1. *Riassumendo:*

- *Se $rg(A) = rg(A|B) = r = n$ massimo, il sistema é compatibile ed ammette un'unica soluzione;*
- *se $rg(A) = rg(A|B) = r < n$, il sistema é compatibile ed ha ∞^{n-r} soluzioni;*
- *se $rg(A) \neq rg(A|B)$, il sistema non ammette soluzioni.*

0.2.1 Esercizi: sistemi senza parametro

Esercizio 0.2.1. *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: Il sistema é omogeneo, dunque compatibile perché $r(A) = r(A|B) = r(A|\underline{0})$. Quante soluzioni ammette? Calcolando il rango di A si ottiene che $r(A) = 2$, dunque il sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, cioé infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro. Cerchiamo l'insieme S delle soluzioni risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x = -2x - 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ y = 2z - 2(-2y - 2z) \\ x = -2y - 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ y = 2z + 4y + 4z \\ x = -2y - 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ y = -2z \\ x = 4z - 2z = 2z \end{cases}$$

La soluzione (x, y, z) *si puó allora scrivere in funzione di* z *come* $(2z, -2z, z)$, *dunque*

$$S = \{(2z, -2z, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 0.2.2. *Risolvere, se possibile, il sistema* $Ax = B$ *con*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ed esprimere la soluzione come somma di soluzione particolare e soluzione generale.

Svolgimento: Calcoliamo $r(A)$ *e* $r(A|B)$. *Si ha* $1 \leq r(A) \leq 3$. *Se orlo il minore* $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *non singolare ottengo un minore* $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *non singolare, dunque* $r(A) = 3$. *Il rango di* $A|B$ *é al massimo* 3, *ma* $A|B$ *contiene il minore* M_3 *non singolare considerato nel calcolo del rango di* A, *dunque* $r(A|B) = 3$. *Essendo* $r(A) = r(A|B) = 3$ *il sistema é compatibile e ammette* $\infty^{4-3} = \infty^1$ *soluzioni.*
Calcoliamo l'insieme S *delle soluzioni risolvendo il sistema* $Ax = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo il prodotto si ottiene

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ 2y - z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x=-t \\ z=2y-1 \\ t+y+2y-1=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-t \\ z=2y-1 \\ y=-\frac{1}{3}t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-t \\ z=-\frac{2}{3}t-1 \\ y=-\frac{1}{3}t \end{cases}$$

Possiamo esprimere la soluzione (x, y, z, t) *in funzione di un unico parametro, dunque l'insieme delle soluzioni é*

$$S = \left\{ \left(-t, -\tfrac{1}{3}t, -\tfrac{2}{3}t - 1, t\right) \in \mathbb{R}^4 | t \in \mathbb{R} \right\}$$

La generica soluzione $\left(-t, -\frac{1}{3}t, -\frac{2}{3}t - 1, t\right)$ *puó essere scritta come somma di* $\left(-t, -\frac{1}{3}t, -\frac{2}{3}t, t\right)$ *e* $(0, 0, -1, 0)$ *che sono rispettivamente la soluzione generale (la soluzione del sistema omogeneo associato* $Ax = 0$*), e la soluzione particolare.*