Introduzione all'algebra delle matrici

Appunti a cura di Lara Ercoli

Indice

Capitolo 1

Definizioni

Definizione 1.0.1. *Chiamiamo* ***matrice*** $m \times n$ ***a coefficienti in*** $\mathbb{K}$ *una tabella di* $m \times n$ *elementi disposti su* m *righe ed* n *colonne.*

Definizione 1.0.2. *Indichiamo l'insieme delle matrici a* m *righe ed* n *colonne fatte di elementi in* $\mathbb{K}$ *con* $Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ *(dove* $m, n \geq 1$*).*

La posizione di ogni elemento della matrice è indicata da due indici i e j e ogni elemento di una generica matrice A si indica con $a_{i,j}$ dove $i=$ indice di riga con $1 \leq i \leq m$ e $j=$ indice di colonna con $1 \leq j \leq n$

Gli elementi $a_{i,j}$ appartengono al campo $\mathbb{K}$ e si scrive $A = (a_{i,j}) \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$.

La generica matrice di m righe e n colonne è

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} \end{pmatrix} \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$$

Esempio 1.0.1. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

A è una matrice rettangolare con $m = 2$ *righe e* $n = 3$ *colonne ad elementi in* $\mathbb{R}$.

Scriviamo $A \in Mat_{2,3}(\mathbb{R})$.

Gli elementi sono così identificati: $a_{1,1} = 1, \quad a_{1,2} = \sqrt{2}, \quad a_{1,3} = 3, \quad a_{2,1} = \frac{1}{2},$

$a_{2,2} = -5, \quad a_{2,3} = 0.$

Possiamo scrivere $A \in Mat_{2,3}(\mathbb{Q})$? Perché?

Esempio 1.0.2. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$.

A è una matrice quadrata con $m = n = 2$ righe e colonne ad elementi in $(\mathbb{R})$. Scriviamo $A \in Mat_2(\mathbb{R})$.

Possiamo scrivere $A \in Mat_2(\mathbb{Q})$? E $A \in Mat_2(\mathbb{Z})$?

1.1 Matrici particolari

Definizione 1.1.1. *$A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ è una **matrice quadrata** se $m = n$, cioè se il numero delle righe è uguale al numero delle colonne, e scriviamo semplicemente $A \in Mat_n(\mathbb{K})$.*

Esempio 1.1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -7 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$

Definizione 1.1.2. *Se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, gli elementi $a_{i,i}$ cioè quelli tali che $i = j$ formano la **diagonale principale**:*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{4} & -7 \\ -3 & 8 & \boxed{9} \end{pmatrix}$$

Si chiama **diagonale secondaria** o antidiagonale quella fatta dagli elementi riquadrati:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & \boxed{4} & -7 \\ \boxed{-3} & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.1.3. *$A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ è una **matrice nulla e si indica con** $\underline{O}$ se $a_{i,j} = 0 \quad \forall i, j$ cioè la matrice $\underline{O}$ è quella i cui elementi sono tutti nulli*

Esempio 1.1.2. $\underline{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2,3}(\mathbb{R})$

Definizione 1.1.4. *$A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ è una **matrice diagonale** D se $a_{i,j} = 0$ $\forall i \neq j$ (cioè se gli elementi al di fuori della diagonale sono tutti nulli)*

Esempio 1.1.3. $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_4(\mathbb{R})$

Osservazione 1.1.1. *In una matrice diagonale non si impone che gli elementi $a_{i,i}$ sulla diagonale debbano essere non nulli, ma potrebbe essere $a_{i,i} = 0$ per qualche i.*

Definizione 1.1.5. *$A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ è una **matrice scalare** se è diagonale e $a_{i,i} = a \quad \forall i = 1, ..., n$*

Esempio 1.1.4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$

Definizione 1.1.6. *$A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ è una **matrice identica** e si indica con I se $a_{i,i} = 1$ e $a_{i,j} = 0 \quad \forall i \neq j$, cioè se è scalare con $a = 1$ (tutti 1 sulla diagonale principale e 0 altrove).*

Esempio 1.1.5. *La matrice quadrata identica di ordine n si indica con I_n ed è*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \in Mat_n(\mathbb{R})$$

Definizione 1.1.7. *$A \in Mat_n(\mathbb{K})$ (quadrata!) è **triangolare superiore** se $a_{i,j} = 0$ $\forall i > j$ cioè se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & ... & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & ... & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & ... & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Definizione 1.1.8. *$A \in Mat_n(\mathbb{K})$ (quadrata!) è **triangolare inferiore** se $a_{i,j} = 0$ $\forall i < j$ cioè se tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli.*

Esempio 1.1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Definizione 1.1.9. *Data $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$, si dice **trasposta** di A la matrice A^t (oppure ${}^tA$) ottenuta da A scambiando le righe con le colonne.*

Esempio 1.1.7. *Se* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *allora* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Osservazione 1.1.2. *Se $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$, allora $A^t \in Mat_{n,m}(\mathbb{K})$.*

Osservazione 1.1.3. $(A^t)^t = A$.

Definizione 1.1.10. *Si dice che $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ è **simmetrica** se $A = A^t$ (cioé $a_{i,j} = a_{j,i}$ $\forall i, j$).*

Osservazione 1.1.4. *Condizione necessaria affinché A sia simmetrica è che A sia quadrata (cioé m= n. Evidente per l'Oss. 1.1.2).*

Definizione 1.1.11. *Sia $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$*

- *se $m = 1$ A è una **matrice riga***
- *se $n = 1$ A è una **matrice colonna***

Esempio 1.1.8.
- *Matrice riga:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

- *Matrice colonna:* $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Capitolo 2

Operazioni con le matrici

2.1 Somma di matrici

Possiamo sommare due matrici $A, B \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ (di uguale dimensione!) eseguendo la somma componente per componente. La matrice $A + B$ risultante avrà come componenti $a_{i,j} + b_{i,j}$ con $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$. $A + B$ è dunque della stessa dimensione di A e B.
La definizione di somma si estende per un qualsiasi numero n finito di matrici.

Esempio 2.1.1.
Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -9 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{3,2}(\mathbb{Z})$,
la loro somma è:

$$A + B + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -9 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+1 & 2+0+9 \\ 3+0+-9 & 9+0+0 \\ 0+0+8 & -5+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -6 & 9 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \in Mat_{3,2}(\mathbb{Z})$$

2.1.1 Proprietà della somma di matrici

Se $A, B, C \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$, allora valgono per la somma tra matrici come definita sopra le seguenti proprietà che rendono $(Mat_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ un gruppo abeliano:

1. associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
2. commutativa: $A + B = B + A$;
3. esistenza dell'elemento neutro $\underline{O}$ tale che $A + \underline{O} = A$;
4. esistenza dell'elemento opposto $-A := (-a_{i,j})$ tale che $-A + A = \underline{O}$.

Vale inoltre questa proprietà per la trasposizione: la trasposta della somma è la somma delle trasposte cioè $(A + B)^t = A^t + B^t$.

2.2 Prodotto per uno scalare

Dati $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{K}$ (lo scalare appartiene allo stesso $\mathbb{K}$ degli elementi di cui è composta A!), si dice **prodotto di k per A** la matrice $C = k \cdot A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ i cui elementi sono

$$c_{i,j} := k \cdot a_{i,j}$$

$\forall i, j$con $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

Esempio 2.2.1.
Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 0 \\ 0 & -6 & 9 \\ 8 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$ *e* $k = 3$*, la matrice* $C = kA$ *è*

$$C = kA = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 0 \\ 0 & -6 & 9 \\ 8 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 11 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-6) & 3 \cdot 9 \\ 3 \cdot 8 & 3 \cdot (-5) & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 33 & 0 \\ 0 & -18 & 27 \\ 24 & -15 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R})$$

2.2.1 Proprietà del prodotto per scalare

Se $A, B \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ e $h, k \in \mathbb{K}$ allora valgono le seguenti proprietà:

1. $k \cdot A = A \cdot k$;
2. $h \cdot (kA) = hk \cdot A$;
3. $k \cdot (A + B) = kA + kB$;
4. $(k + h) \cdot A = kA + hA$;.
5. $(kA)^t = k \cdot A^t$.

Esercizio 2.2.1. *Si verifichino le proprietà appena enunciate tramite questi esempi:*

1. $$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2$$

2. $$2 \cdot \left[3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right] = 2 \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. $$5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \right] = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

4. $$(2 - 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

5. $$\left[3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right]^t = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^t$$

2.3 Prodotto di matrici

2.3.1 Prodotto di una matrice riga per una matrice colonna

Il prodotto vettore riga - vettore colonna (su vettori con lo stesso numero di elementi!) con elementi in K è così definito:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \in K$$

2.3.2 Prodotto di matrici (righe per colonne)

Date la matrice $A \in Mat_{m,\mathbf{p}}(\mathbb{K})$ e la matrice $B \in Mat_{\mathbf{p},n}(\mathbb{K})$, si dice **prodotto righe per colonne di** A **per** B la matrice $C = A \cdot B \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ i cui elementi $c_{i,j}$ si trovano sommando i prodotti *termine a termine* della $i-$esima riga di A per la $j-$esima colonna di B, o più semplicemente svolgendo il prodotto della $i-$esima riga di A per la $j-$esima colonna di B, cioé:

$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & ... & a_{i,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix} := a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + ... + a_{i,p} \cdot b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Osservazione 2.3.1. *Si può eseguire il prodotto tra matrici $A \cdot B$ solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.*

Esempio 2.3.1. *Siano $A, B \in Mat_2(\mathbb{R})$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.*
Calcoliamo $C = A \cdot B \in Mat_2(\mathbb{R})$.

$c_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$

$c_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 0 = -1$

$c_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 - 2 = -2$

$c_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Dunque $C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Come mostra l'esempio la matrice risultante C avrà nella posizione $c_{1,1}$ il prodotto della prima riga di A con la prima colonna di B, nella posizione $c_{1,2}$ il prodotto della prima riga di A con la seconda colonna di B e così via. In generale nella posizione $c_{i,j}$ il prodotto della $i-esima$ riga di A con la $j-esima$ colonna di B con $i, j = 1, ..., n$.

Esempio 2.3.2. *Siano* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{2,3}(\mathbb{R})$ *e* $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{3,2}(\mathbb{R})$.
Allora:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 7 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 7 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 16 & -3 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}).$$

Esempio 2.3.3. *Siano* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2,3}(\mathbb{R})$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \in Mat_{3,2}(\mathbb{R})$.

Calcoliamo $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2,3}(\mathbb{R}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-4) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 + 0 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}).$$

Osservazione 2.3.2. *Si può calcolare anche* $B \cdot A$*? Sì, ma si nota immediatamente che* $Mat_{3,2}(\mathbb{R}) \cdot Mat_{2,3}(\mathbb{R}) = Mat_3(\mathbb{R})$*, dunque dev'essere* $A \cdot B \neq B \cdot A$ *e* ***il prodotto tra matrici non è commutativo****.*

Esercizio 2.3.1. *Si provi a svolgere il prodotto $B \cdot A$ con le matrici A e B dell'esempio 2.3.2 e si verifichi che $AB \neq BA$.*

(Soluzione $BA = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 \\ -7 & -8 & 9 \\ 15 & 28 & -3 \end{pmatrix}$.

Osservazione 2.3.3. $A \cdot B = \underline{O} \not\Rightarrow A = \underline{O}$ *oppure* $B = \underline{O}$.

Proviamo questa affermazione semplicemente con un esempio:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3.3 Proprietà del prodotto tra matrici

1. Associativa $A(BC) = (AB)C$;

2. Esistenza dell'elemento neutro I tale che $I \cdot A = A$.

   Se $A \in Mat_n\mathbb{K}$ si ha $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$;

3. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$;

4. distributiva a destra e sinistra rispetto alla somma:

   $(A + B) \cdot C = AC + BC$ e $A \cdot (B + C) = AB + AC$

Osservazione 2.3.4. *Come già osservato il prodotto tra matrici **non** gode della proprietà commutativa.*

2.4 Trasposta di una matrice

La trasposta di una matrice $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ è ottenuta scambiando l' elemento $a_{i,j}$ con l' elemento $a_{j,i}$ $\forall i, j$ (scambiare indice di riga e indice di colonna , scambiare righe e colonne). La matrice trasposta di A si indica con $A^T \in Mat_{n,m}(\mathbb{K})$.

Proposizione 2.4.1. *Per le matrici trasposte valgono le seguenti proprietà :*

1) $(A + B)^T = A^T + B^T$*;*

2) $(AB)^T = B^T A^T$;

2') *se* k *scalare* $(kB)^T = kA^T$;

3) $(A^T)^T = A$.

Proposizione 2.4.2. *Se per* $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ *si ha* $A = A^T$, *allora* A *è simmetrica.*

Proposizione 2.4.3. *Se* $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ *è triangolare superiore (inferiore), allora* A^T *è triangolare inferiore (superiore).*

Definizione 2.4.1. $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ *si dice antisimmetrica (o emisimmetrica) se* $A^T = -A$.

Capitolo 3

Determinante di una matrice

Osserviamo immediatamente che le matrici rettangolari non hanno determinante. Questa **operazione è possibile unicamente per matrici quadrate**.
Se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, indichiamo il suo determinante con $|A|$ oppure con $det(A)$. Il determinante di una matrice è uno scalare $k \in \mathbb{K}$.

3.1 Calcolo del determinante

- Se $A \in Mat_1(\mathbb{K})$ cioè è un singoletto, il suo determinante è il valore del suo unico elemento.
  Se per esempio $A = (2)$ allora $|A| = 2$;

- Se $A \in Mat_2(\mathbb{K})$ il suo determinate è dato dalla differenza tra il prodotto degli elementi sulla diagonale principale e il prodotto di quelli sulla diagonale secondaria. In simboli

$$\text{se } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{allora } |A| = ad - cb;$$

- Se $A \in Mat_3(\mathbb{K})$ possiamo calcolarne il determinante con la regola di *Sarrus*:

  - accostiamo a destra della matrice la prima e la seconda colonna (oppure sotto la matrice la prima e la seconda riga);

- sommiamo il prodotto degli elementi della diagonale principale con i prodotti degli elementi delle sue due sovradiagonali;
- dalla precedente somma sottraiamo il prodotto degli elementi della diagonale secondaria e i prodotti degli elementi delle sue due sottodiagonali.

Esempio 3.1.1.

$$\textit{Sia } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \textit{allora:} \quad |A| = \left| \begin{matrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{matrix} =$$

$$= -1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 \cdot 1 - (-2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 2) =$$
$$= -2 - 16 + 6 + 4 = -8;$$

- Se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ per $n \geq 2$ è diagonale, triangolare inferiore o triangolare superiore, il calcolo del suo determinante si riduce all'eseguire il prodotto degli elementi sulla sua diagonale principale.
- se $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ per $n \geq 2$ possiamo calcolare il determinante

  1. secondo il teorema di *Laplace* rispetto ad una qualunque riga oppure colonna della matrice, in questo modo:
     - rispetto alla i-esima riga della matrice:

       $$|A| = \textstyle\sum_j (-1)^{i+j} a_{i,j} \, |A_{i,j}|$$

       dove con $A_{i,j}$ intendiamo la matrice A a cui abbiamo tolto la i-esima riga e la j-esima colonna.
     - rispetto alla j-esima colonna della matrice:

       $$|A| = \textstyle\sum_i (-1)^{i+j} a_{i,j} \, |A_{i,j}|$$

       dove con $A_{i,j}$ intendiamo la matrice A a cui abbiamo tolto la i-esima riga e la j-esima colonna.

Osserviamo che $(-1)^{i+j}$ indica il fatto che se la somma dell'indice di riga e colonna è dispari, cambiamo il segno nella somma, altrimenti lo manteniamo.

Esempio 3.1.2. *Con un esempio vediamo operativamente come trovare il determinante di una matrice quadrata di ordine* $n \geq 2$ *seguendo la regola di Laplace. (Il che è molto più facile di quanto sembra). Prendiamo la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *dell'esempio precedente, così vedremo che il risultato sarà lo stesso usando un metodo diverso. Calcoliamo il determinante rispetto alla prima colonna (o rispetto alla seconda riga, perchè nella posizione* $a_{2,1}$ *compare uno zero, ed i conti si semplificano, dacchè un prodotto si annullerà). Notiamo comunque che una qualsiasi altra riga o colonna va bene (provare per credere!). Si ha:*

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+1} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 + 0 + (-10) = -8.$$

Definizione 3.1.1. *Lo scalare* $(-1)^{i+j} |A_{i,j}|$ *si chiama complemento algebrico dell'elemento* $a_{i,j}$.

2. secondo il metodo di *Gauss-Jordan* che consiste nel trasformare una matrice $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ in una matrice triangolare superiore, applicando alle righe (o colonne) le seguenti operazioni:
   (a) scambiare tra loro due righe (colonne);
   (b) moltiplicare tutti gli elementi di una riga (colonna) per uno stesso scalare non nullo;

(c) sommare ad una riga (colonna) un multiplo scalare di un'altra;

con le segueni avvertenze:

(a') ogni operazione di tipo (a) ha come effetto un cambiamento di segno nel determinante;

(b') per ogni operazione di tipo (b) il determinante risulta moltiplicato per lo scalare;

(c') ogni operazione di tipo (c) non modifica il determinante.

Proposizione 3.1.1. *Valgono per il determinante le seguenti proprietà:*

- $|A| = |A^T|$*;*
- *Se* A *ha una riga o colonna nulla, allora* $|A| = 0$*;*
- *Se* A *ha due righe o colonne uguali, allora* $|A| = 0$*;*
- *Se* A *ha due righe o colonne linearmente dipendenti, allora* $|A| = 0$*;*
- *(Teorema di* ***Binet****) Se* $A, B \in Mat_n(\mathbb{K})$ *si ha:* $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.